

Suspension de particules dans un fluide à seuil : approche micromécanique

Xavier Chateau & Kien Luu Trung

Institut Navier

*Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil
2 Allée Kepler, 77420 Champs sur Marne, France. Xavier.Chateau@lcp.fr*

Résumé :

Le comportement d'une suspension de particules indéformables immergées dans un fluide à seuil (fluide de Herschel-Bulkley) est étudié dans le cadre d'une méthode d'homogénéisation. Deux approches complémentaires sont présentées. On montre que si la suspension est isotrope à l'échelle macroscopique, elle se comporte pratiquement comme un fluide de Herschel-Bulkley de même exposant que celui de la phase liquide. On propose alors une estimation des caractéristiques de la suspension que l'on compare aux résultats expérimentaux de Mahaut et al. (2007) et de la littérature.

Abstract :

The behavior of the suspension of rigid particles in a yield stress fluid (Herschel-Buckley) is studied in the framework of a nonlinear homogenization method. Two complementary approaches are presented. It is showed that if the suspension is isotropic at the macroscopic scale, it almost behaves like a Herschel-Bulkley fluid with an exponent equal to that of the fluid phase. The model's predictions are compared to experimental data of Mahaut et al. (2007) and of the literature.

Mots-clefs :

Suspension, fluide à seuil, homogénéisation

1 Introduction

Le travail présenté ici est une contribution visant à caractériser l'influence de l'ajout de particules non colloïdales dans un fluide à seuil sur les caractéristiques macroscopiques de la suspension. Pour cela, on s'intéresse au comportement de suspensions de particules indéformables suspendues dans un fluide de Herschel-Bulkley (fluide à seuil incompressible) et plus particulièrement à l'influence de l'ajout de particules sur la valeur du seuil et de la consistance à l'échelle macroscopique.

2 Homogénéisation du comportement

On considère un volume élémentaire représentatif (ver) de suspension occupant à l'instant considéré le domaine Ω de frontière $\partial\Omega$. On adopte une représentation eulérienne du mouvement et on se restreint aux situations où les évolutions du système sont quasi-statiques, les forces à distance sont négligeables et la taille caractéristique des particules est beaucoup plus petite que la taille caractéristique du ver (conditions d'homogénéabilité du comportement (Zaoui (2002))). Les particules indéformables occupent le domaine Ω_s tandis que le fluide porteur occupe le domaine Ω_ℓ , complémentaire de Ω_s dans Ω . Pour simplifier, on suppose que la frontière du ver est uniquement constituée de particules fluides.

Dans le cadre d'une approche par changement d'échelle, le comportement macroscopique de cette suspension s'obtient en résolvant un problème d'écoulement posé sur le ver. Le char-

gement macroscopique appliqué sur le ver est défini par la condition de Hashin qui relie la vitesse des points situés sur le bord du ver à la valeur du tenseur taux de déformation eulérien macroscopique \mathbf{D} :

$$(\forall \underline{x} \in \partial\Omega) \quad \underline{u}(\underline{x}) = \mathbf{D} \cdot \underline{x} \quad (1)$$

et par la condition d'équilibre sans force de volume :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega) \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\underline{x}) = 0 \quad (2)$$

où $\boldsymbol{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes de Cauchy à l'échelle microscopique. Le fluide porteur est homogène et obéit à la loi de comportement de Herschel-Bulkley de contrainte critique τ_c , de viscosité η et d'exposant n . Cette loi s'écrit :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{d}}(\mathbf{d}) \quad (3)$$

avec

$$w(\mathbf{d}) = \tau_c \tilde{d} + \frac{\eta}{n+1} \tilde{d}^{n+1} \quad \text{si } \operatorname{tr} \mathbf{d} = 0 \quad (4)$$

$$w(\mathbf{d}) = \infty \quad \text{si } \operatorname{tr} \mathbf{d} \neq 0$$

avec \mathbf{d} le tenseur de déformation eulérien à l'échelle microscopique et $\tilde{d} = \sqrt{\mathbf{d} : \mathbf{d}}$. Les particules sont modélisées comme des solides indéformables ne développant que des interactions hydrodynamiques entre elles. On a donc $\mathbf{d} = 0$ dans Ω_s . Cette condition d'indéformabilité s'écrit également sous la forme 3 avec $w(\mathbf{d}) = 0$ si $\mathbf{d} = 0$ et $w(\mathbf{d}) = \infty$ si $\mathbf{d} \neq 0$. On suppose de plus que le fluide adhère parfaitement aux particules. Le ver est donc constitué d'un milieu hétérogène dont le comportement s'écrit sous la forme 3 avec w une fonction strictement convexe partout. Il a été montré dans Suquet (1997) que le comportement macroscopique de ce matériau s'écrit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{D}}(\mathbf{D}) \quad \text{avec } W(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{d} \in \mathcal{K}(\mathbf{D})} \langle w(\mathbf{d}) \rangle \quad (5)$$

où $\mathcal{K}(\mathbf{D})$ désigne l'ensemble des champs de taux de déformation eulérien cinématiquement admissible avec \mathbf{D} , c'est à dire géométriquement compatible avec un champ de vitesse défini sur Ω vérifiant la condition à la limite 1. $\langle \rangle$ désigne l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par le ver. En utilisant le fait que les particules sont indéformables et que le fluide porteur est homogène, on montre que le potentiel macroscopique est également défini par :

$$W(\mathbf{D}) = \inf_{\mathbf{d} \in \mathcal{G}(\mathbf{D})} (1 - \varphi) \left[\tau_c \langle \tilde{d} \rangle_\ell + \frac{\eta}{n+1} \langle \tilde{d}^{n+1} \rangle_\ell \right] \quad (6)$$

où $\mathcal{G}(\mathbf{D})$ désigne l'ensemble des champs de taux de déformation eulérien cinématiquement admissibles vérifiant $\mathbf{d} = 0$ dans Ω_s , φ la fraction volumique occupée par les particules au sein de la suspension et $\langle \rangle_\ell$ l'opérateur de moyenne sur le domaine occupé par le fluide. L'ensemble $\mathcal{G}(\mathbf{D})$ étant convexe, le problème de minimisation 6 admet une solution unique, ce qui assure la validité de la démarche. L'identification du comportement macroscopique de la suspension à partir des relations 5 ou 6 nécessite la résolution d'un problème de minimisation convexe de dimension infinie. Ce problème de minimisation doit être résolu pour chaque morphologie de la suspension définie par la donnée de la forme des particules et de leur répartition au sein de la suspension. Il n'est pas possible de résoudre ce problème dans la plupart des situations d'intérêts pratiques. Pour remédier à cette difficulté, différentes techniques d'estimation du comportement macroscopique ont été développées (voir Suquet (1997) par exemple). Dans la suite de ce travail, on suppose pour simplifier que les particules solides sont réparties de façon isotrope au sein du ver. Le comportement macroscopique de la suspension est donc également isotrope.

3 Borne inférieure du potentiel

On établit sans difficulté que le potentiel $W(\mathbf{D})$ admet la minoration suivante :

$$(1 - \varphi) \left[\tau_c \inf_{\mathbf{d} \in \mathcal{G}(\mathbf{D})} \langle \tilde{\mathbf{d}} \rangle_\ell + \frac{\eta}{n+1} \inf_{\mathbf{d} \in \mathcal{G}(\mathbf{D})} \langle \tilde{\mathbf{d}}^{n+1} \rangle_\ell \right] \quad (7)$$

En utilisant les propriétés des fonctions $\langle \tilde{\mathbf{d}}^m \rangle_\ell$ pour $m > 1$ et de l'ensemble $\mathcal{G}(\mathbf{D})$, on établit que le comportement macroscopique de la suspension isotrope est « minorée » énergétiquement par une loi de Herschel-Bulkley de même indice d'écoulement que celui du fluide porteur, de seuil τ_c^{hom} et de consistance η^{hom} . Les deux grandeurs τ_c^{hom} et η^{hom} s'obtiennent en résolvant les deux problèmes de minimisation permettant de calculer explicitement la borne inférieure 7.

Ces deux grandeurs sont donc elles-mêmes des solutions de problèmes d'homogénéisation non linéaires. Par ailleurs, on observe que pour les faibles valeurs des taux de déformation le premier terme du potentiel de Herschel-Bulkley 4 est dominant alors que pour les fortes valeurs des taux de déformations c'est le second terme qui doit être pris en compte.

Cette propriété permet de montrer que, bien que le comportement macroscopique de la suspension n'obéisse pas exactement à une loi de Herschel-Bulkley, il tend pour les faibles valeurs du taux de déformation (près du seuil) et pour les fortes valeurs du taux de déformation (loin du seuil) vers le comportement d'un fluide de Herschel-Bulkley de caractéristiques τ_c^{hom} , η^{hom} et n .

4 Estimation sécante du comportement

On utilise la méthode sécante modifiée décrite dans Suquet (1997) pour estimer le comportement homogénéisé de la suspension. Pour cela, on écrit la loi de comportement du fluide de Herschel-Bulkley sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu^{\text{sct}}(\tilde{\mathbf{d}})\mathbf{d} - p\boldsymbol{\delta} \quad (8)$$

avec $\boldsymbol{\delta}$ le tenseur identité du second ordre, p la valeur de la pression et $\mu^{\text{sct}}(\tilde{\mathbf{d}})$, le module sécant défini en chaque point de la phase fluide par :

$$\mu^{\text{sct}}(\underline{x}, \tilde{\mathbf{d}}(\underline{x})) = \frac{\tau_c}{\tilde{\mathbf{d}}(\underline{x})} + \eta \left(\tilde{\mathbf{d}}(\underline{x}) \right)^{n-1} \quad (9)$$

En utilisant l'écriture 8 et 9 de la loi de comportement en même temps que les relations 1 et 2 définissant le chargement appliqué sur le ver, on remplace le problème d'homogénéisation non linéaire original par un problème d'homogénéisation linéaire pour une suspension de particules indéformables dans un fluide incompressible isotrope hétérogène. Toute la difficulté consiste maintenant à calculer, ou plutôt à estimer la valeur prise par la grandeur $\tilde{\mathbf{d}}$ au sein du domaine occupé par la phase fluide dans le ver. L'idée la plus simple consiste à adopter une estimation du module sécant uniforme par phase. On ne cherche donc à prendre en compte que les hétérogénéités interphases du champ des taux de déformation et on néglige l'influence des hétérogénéités intraphases sur le comportement macroscopique. Cette estimation s'écrit :

$$(\forall \underline{x} \in \Omega_\ell) \quad \mu^{\text{sct}}(\underline{x}, \tilde{\mathbf{d}}(\underline{x})) \simeq \mu_\ell^{\text{sct}}(\tilde{\mathbf{d}}_\ell^{\text{eff}}) \quad \text{avec} \quad \tilde{\mathbf{d}}_\ell^{\text{eff}} = \sqrt{\langle \tilde{\mathbf{d}}^2 \rangle_\ell} \quad (10)$$

La valeur du taux de déformation équivalent $\tilde{\mathbf{d}}_\ell^{\text{eff}}$ dépend bien sûr de la valeur du taux de déformation macroscopique appliqué.

La résolution du problème d'homogénéisation linéaire pour une suspension isotrope de particules dans un fluide newtonien est un problème qui a été traité par de nombreux auteurs. De nombreux résultats et estimations sont disponibles dans la littérature traitant de la rhéologie (voir Mewis *et al.* (1994)) ou de l'homogénéisation des matériaux hétérogènes (Torquato (2001)). On note $g(\varphi)$ le coefficient de proportionnalité entre la viscosité macroscopique et la viscosité microscopique.

$$\mu^{\text{hom}} = \mu_\ell g(\varphi) \quad (11)$$

La seule difficulté pratique à lever pour mettre en oeuvre la démarche est le calcul de $\tilde{d}_\ell^{\text{eff}}$ en fonction de \mathbf{D} pour le schéma d'homogénéisation retenu. Kreher (1990) a montré la relation :

$$\langle \tilde{d} \rangle_\ell = \frac{1}{1-\varphi} \frac{\partial \mu^{\text{hom}}}{\partial \mu_\ell} \tilde{D}^2 = \frac{1}{1-\varphi} g(\varphi) \tilde{D}^2 \quad (12)$$

En combinant les relations 9, 11 et 12, on obtient l'estimation suivante du module sécant de la suspension :

$$\mu^{\text{hom}}(\varphi, \mathbf{D}) = \frac{\tau_c^{\text{hom}}}{\tilde{D}} + \eta^{\text{hom}} \tilde{D}^{n-1} \quad (13)$$

avec :

$$\tau_c^{\text{hom}} = \tau_c \sqrt{(1-\varphi)g(\varphi)} \quad (14)$$

et :

$$\eta^{\text{hom}} = \eta g(\varphi) \left[\frac{g(\varphi)}{1-\varphi} \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (15)$$

On prédit donc qu'à l'échelle macroscopique, la suspension se comporte comme un fluide de Herschel-Bulkley de même exposant que celui du fluide porteur et de contrainte critique et de viscosité macroscopique définies par 14 et 15. Ce résultat ne dépend pas du schéma d'homogénéisation linéaire retenu pour relier la viscosité du fluide porteur à la viscosité de la suspension. La qualité de la prédiction dépend donc uniquement de la pertinence de l'approximation consistant à remplacer le champ hétérogène de module sécant défini sur le domaine occupé par le fluide par sa valeur moyenne. Il est possible de vérifier expérimentalement la validité de cette approximation en utilisant le fait que la relation 11 permet également de calculer le module d'élasticité macroscopique d'une suspension isotrope de particules indéformables dispersées dans une matrice élastique incompressible isotrope (les deux problèmes se posent exactement de la même façon). On a donc pour le module de cisaillement d'une suspension :

$$G^{\text{hom}}(\varphi) = G g(\varphi) \quad (16)$$

En combinant les expressions 14, 15 et 16 on obtient les expressions suivantes pour la contrainte seuil et la viscosité en fonction du module de cisaillement élastique macroscopique de la suspension :

$$\tau_c^{\text{hom}}/\tau_c = \sqrt{(1-\varphi)G^{\text{hom}}(\varphi)/G} \quad (17)$$

et

$$\eta^{\text{hom}}/\eta = \sqrt{\frac{(G^{\text{hom}}(\varphi)/G)^{n+1}}{(1-\varphi)^{n-1}}} \quad (18)$$

La mesure du module d'élasticité de la suspension en fonction de la concentration permet donc d'identifier la fonction $g(\varphi)$ tandis que la comparaison des mesures expérimentales du seuil ou de la viscosité avec les expressions 14 et 15 permet de juger de la pertinence de l'approximation utilisée. Mahaut *et al.* (2007) ont montré à partir de mesures du seuil de contrainte et du module d'élasticité de plusieurs suspensions modèles que l'approximation utilisée pour obtenir 13, 14 et 15 était tout à fait pertinente pour une large classe de matériaux.

5 Applications

On peut valoriser directement les relations 13, 14 et 15 en utilisant les résultats disponibles dans la littérature pour la viscosité d'une suspension newtonienne de particules. Pour les suspensions à très faible teneur en particules, on dispose de la relation d'Einstein $g(\varphi) = 1 + 5/2\varphi$, exacte au premier ordre en φ . En reportant cette relation dans 14 et 15 et en ne conservant que les termes du premier ordre, on obtient les estimations :

$$\tau_c^{\text{DL}} = \tau_c (1 + 3/4\varphi) \quad (19)$$

$$\eta^{\text{DL}} = \eta \left(1 + \frac{7n+3}{4}\varphi \right) \quad (20)$$

On remarque que les coefficients de croissance de ces deux grandeurs sont différents de celui de la loi d'Einstein. La seule approximation contenue dans ces relations provient de l'estimation utilisée pour construire la méthode sécante. Elles ne sont donc pas rigoureusement exactes. Si l'on doit travailler avec des valeurs plus importantes de la concentration en particules, on peut évidemment utiliser la relation de Krieger et Dougherty (1959) bien que cette relation n'ait pas reçu à notre connaissance de justification rigoureuse dans le cadre des techniques d'homogénéisation. Elle constitue néanmoins une estimation largement acceptée de la fonction $g(\varphi)$ dans le cas linéaire. On obtient alors

$$\tau_c^{\text{KD}} = \tau_c \sqrt{(1 - \varphi)(1 - \varphi/\varphi_m)^{-2.5\varphi_m}} \quad (21)$$

$$\eta^{\text{DL}} = \eta (1 - \varphi)^{\frac{1-n}{2}} (1 - \varphi/\varphi_m)^{-1.25(n+1)\varphi_m} \quad (22)$$

avec φ_m la fraction volumique maximale d'empilement de la suspension. On constate que les deux grandeurs macroscopiques divergent également quand φ tend vers φ_m . On rend donc bien compte du phénomène de blocage de l'écoulement.

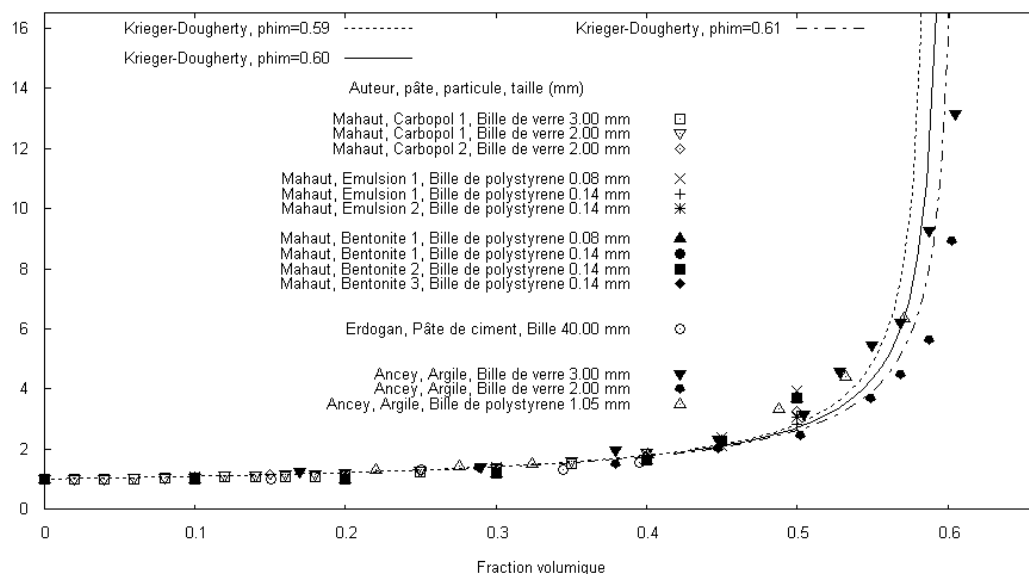


FIG. 1 – Comparaison théorie–expériences pour le seuil de mise en écoulement

On a comparé les valeurs prédites par la relation 21 aux valeurs mesurées du seuil de contrainte pour plusieurs types de suspension. Les mesures de Mahaut *et al.* (2007) ont été

complétées par les mesures de Ancey *et al.* (2001) pour des suspensions de particules dans des dispersions d'argile et les mesures de Erdogan (2005) pour des suspensions de particules dans des pâtes de ciment. La seule variable d'ajustement possible ici est la valeur de la fraction volumique d'empilement maximale φ_m . Comme l'ensemble des mesures expérimentales concerne des suspensions monodisperses de particules, on peut considérer que la valeur $\varphi_m \simeq 0.6$ est tout à fait acceptable. Enfin, on notera qu'aussi bien pour les expériences de Mahaut *et al.* (2007) que celles de Ancey *et al.* (2001), l'hypothèse d'isotropie à l'échelle macroscopique de la suspension est tout à fait compatible avec les procédures employées pour mesurer les seuils de contrainte.

6 Conclusions et perspectives

On a obtenu des estimations des caractéristiques rhéologiques d'une suspension de particules non colloïdales dans un fluide de Herschel-Buckley. A notre connaissance, cette approche et les résultats qu'elle fournit sont originaux en rhéologie. Compte tenu du caractère non linéaire des problèmes à résoudre, il est nécessaire de procéder à des approximations pour obtenir des estimations des caractéristiques macroscopiques de la suspension. Les estimations proposées dans ce papier ont été obtenues en négligeant complètement les hétérogénéités du champ de déformation à l'intérieur de la phase fluide. Pour les situations où cette approximation s'avérerait trop grossière, il est bien sûr possible de chercher à capturer dans l'approche la contribution des hétérogénéités de champ en séparant le domaine occupé par la phase fluide en plusieurs domaines. Il convient de noter que la méthode d'homogénéisation non linéaire présentée ici s'applique à tous les comportements du fluide porteur et des inclusions pouvant être décrits par un potentiel.

Références

- Mahaut F., Ovarlez G., Coussot P. 2007 Suspension de particules dans un fluide à seuil : approche expérimentale. In *Actes du 18ème Congrès de Mécanique, Grenoble*.
- Zaoui A. 2002 Continuum Micromechanics : Survey. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **128**(8) 808-816.
- Suquet P. 1997 *Continuum micromechanics*, Springer-verlag Wien New York.
- Krieger I. M., Dougherty T. J., 1959 A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres *Transactions of the society of rheology* **III** 137-152.
- Mewis J., Macosko C. W. 1994 Suspension Rheology In *Rheology : principles, measurements and applications*, ed. C. W. Macosko Wiley-vch.
- Torquato S. 2001 *Random heterogeneous materials : microstructure and macroscopic properties* Springer.
- Kreher W. 1990 Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals *J. Mech. Phys. Solids* **1** 115-128.
- Ancey C., Jorrot H. (2001) Yield stress for particle suspensions within a clay dispersion *J. Rheol.* **45**(2) 297-319.
- Erdogan T. S. 2005 *Determination of aggregate shape properties using X-ray tomographic methods and the effect of shape on concrete rheology*, Phd Thesis, University of Texas at Austin.